

5. Хэкетт Т., Маззаферро Э. Экстренная и интенсивная ветеринарная помощь. Техника выполнения процедур. М., 2015. 176 с.
6. Droc G., Grigorescu B., Grigoriou M. et al. Anesthesia for experimental surgery in swine // Chirurgia: Bucharest, Romania. – 2009. – V. 104, № 3. – P. 259–265.
7. <http://vetvrach.info/anest5.html> (22.04.18г. – 18:35)
8. https://fictionbook.ru/author/anatoliyi_stekolnikov/veterinarnaya_anesteziologiya/read_online.html (15.03.18г. – 20:51)
9. http://vmede.org/sait/?id=Anesteziologiya_dolina_2007&menu=Anesteziologiya_dolina_2007&page=11 (25.04.18г. – 14:20)
10. <https://infopedia.su/17xa11d.html> (25.04.18г. – 17:00)

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РУЛЬКОВА

Насырова В.М., Ряшко Л.Б.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

nasyrova.ven@yandex.ru, lev.ryashko@urfu.ru

Аннотация. В статье исследуется двумерная модель Рутькова нейронной активности в зоне замкнутых инвариантных кривых канардного типа. Изучается эффект расщепления под воздействием случайных возмущений. Рассматривается переход от режима тонического спайкинга к режиму стохастического берстинга. Для исследования этих явлений используются метод прямого численного моделирования и метод функции стохастической чувствительности.

Ключевые слова: модель Рутькова, нейронная активность, функция стохастической чувствительности, Канарды, стохастическое расщепление, случайные возмущения.

ANALYSIS OF STOCHASTIC SPLITTING IN THE TWO-DIMENSIONAL RULKOV MODEL

Nasyrova V., Ryashko L.

Abstract. In this paper, we investigate the two-dimensional Rulkov model of neural activity in the zone of Canard-type closed invariant curves. We are studying the phenomenon of splitting under random disturbances. We are considered the transition from the tonic spiking regime to the stochastic bursting one. The direct numerical simulation and the stochastic sensitivity function technique are used to study these phenomena.

Key words: Rulkov model, neural activity, the stochastic sensitivity function technique, Canards, stochastic splitting, random disturbances.

В последнее время изучение нелинейных динамических систем привлекает внимание многих математиков. С помощью этих систем также описывается и нейронная активность. В данной статье мы рассмотрели феноменологическую модель Рулькова [1]. Преимущество феноменологических моделей над физиологическими заключается в том, что уже в двумерном варианте они способны демонстрировать такой сложный режим нейронной активности как берстинг. Параметрическое описание данной детерминированной модели представлено в [2].

В данной модели под воздействием случайных возмущений происходят различные явления, описание которых можно найти в [3, 4, 5]. В данной статье мы исследовали стохастическое расщепление ЗИКов канардного типа и сопровождающее его изменение режима нейронной активности от тонического спайкинга к стохастическому берстингу. Для исследования этих явлений мы использовали методы прямого численного моделирования и функции стохастической чувствительности (ФСЧ) [6].

МЕТОД ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим стохастическую систему:

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi \quad (1)$$

где x – вектор размерности n , $f(x)$ – n -вектор-функция, $\sigma(x_t)$ – матричная функция размерности $(n \times m)$, ε – скалярный параметр, обозначающий интенсивность шума, ξ_t – m -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t \xi_t^T = I$, $E\xi_t \xi_k^T = 0$ (I – единичная матрица размерности $m \times m$; $t \neq k$).

Пусть замкнутая инвариантная кривая γ – экспоненциально устойчивый аттрактор системы (1) при $\varepsilon = 0$. Под воздействием случайных возмущений

вокруг этой кривой образуется стационарное вероятностное распределение $\rho(x, \varepsilon)$. Для аппроксимации этого распределения был предложен метод функции стохастической чувствительности [6].

Если замкнутая кривая γ состоит из семейства k -циклов детерминированной системы, то для любой точки $\bar{x} \in \gamma$ решение \bar{x}_t , начинающееся с $\bar{x}_1 = \bar{x}$, будет k -периодическим.

Стохастическая чувствительность ЗИКа в точках $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ описывается матрицами W_1, \dots, W_k . Здесь W_t – стохастическая чувствительность точки \bar{x}_t .

Матрица W_1 удовлетворяет линейному уравнению:

$$W_1 = P_1 [F W_1 F^T + Q] P_1, \quad F = F_k P_k F_{k-1} \dots P_2 F_1, \quad Q = Q^{(k)}, \quad (2)$$

где матрица $Q^{(k)}$ может быть найдена рекуррентно:

$$Q^{(0)} = 0, \quad Q^{(j)} = P_{j+1} [F_j Q^{(j-1)} F_j^T + G_j] P_{j+1} \quad (j = 1, \dots, k-1),$$

$$Q^{(k)} = F_k Q^{(k-1)} F_k^T + G_k.$$

Здесь $F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t)$, $G_t = \sigma(\bar{x}_t) \sigma^T(\bar{x}_t)$, и матрица P_t определяет проекцию на гиперплоскость Π_t . Матрицы W_2, \dots, W_k можно найти рекуррентно:

$$W_{t+1} = P_{t+1} [F_t W_t F_t^T + G_t] P_{t+1} \quad (3)$$

В двумерном случае имеет место уравнение $W_1 = m_1 p_1 p_1^T$. Здесь p_1 – вектор, ортогональный ЗИКу в точке \bar{x}_1 . Скалярный коэффициент m_1 определяется в явном виде:

$$m_1 = \frac{p_1^T Q p_1}{1 - (p_1^T F p_1)^2}.$$

Если замкнутая инвариантная кривая образована семейством квазипериодических решений, то с помощью необходимой точности можно аппроксимировать ЗИКи периодической последовательностью. Чтобы уменьшить погрешность такого приближения, нужно использовать последовательности большой длины.

ЭФФЕКТ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РУЛЬКОВА

Рассмотрим стохастическую двумерную модель Рулькова:

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + y_t + \varepsilon \xi_t, \\ y_{t+1} = y_t - \alpha x_t - \beta \end{cases}, \quad (4)$$

где x – быстрая динамическая переменная, y – медленная динамические переменные, α , σ и β – некоторые положительные параметры, ξ_t – случайная величина, распределенная по закону Гаусса с параметрами $E(\xi_t) = 0$, $E(\xi_t^2) = 1$, ε – интенсивность шума. Зафиксируем параметры $\sigma = \beta = 0.005$ и рассмотрим изменение динамики системы (4) при варьировании параметра α .

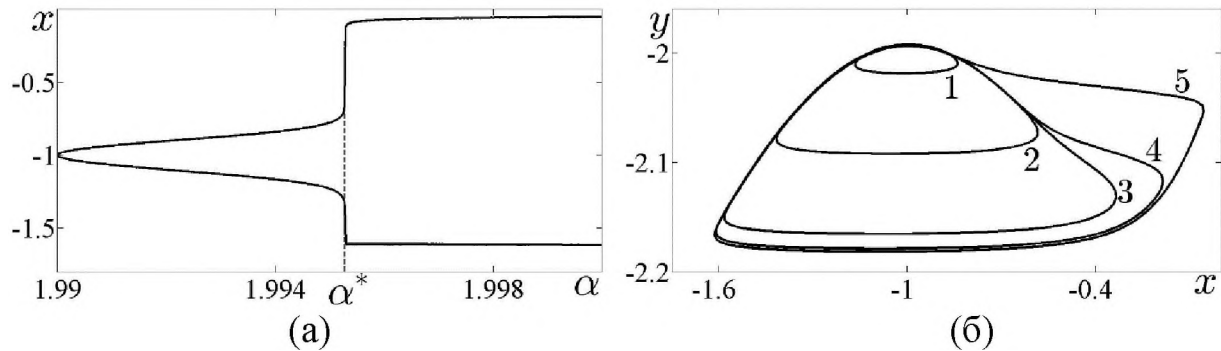
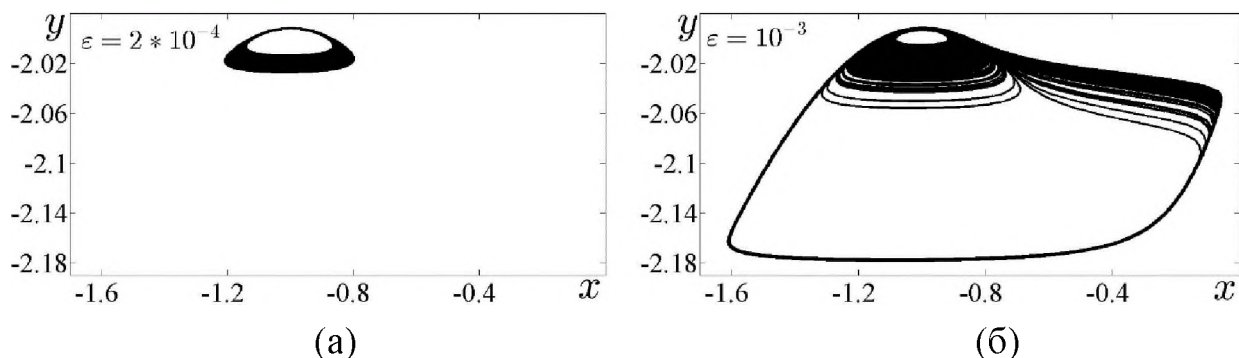


Рисунок 1: Для детерминированной модели ($\varepsilon = 0$) (а) бифуркационная диаграмма и (б) ЗИКи при (1) $\alpha = 1.994$, (2) $\alpha = 1.995277$, (3) $\alpha = 1.9952775$, (4) $\alpha = 1.995278$, (5) $\alpha = 1.998$

В детерминированной ($\varepsilon = 0$) модели Рулькова когда параметр α проходит через значение $\alpha = 1.99$, тогда в системе (4) наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера с рождением замкнутой инвариантной кривой. Пространственные изменения представлены на рис. 1(а). Видно, что в районе значения параметра $\alpha = \alpha^*$ ($\alpha^* \approx 1.9952775$) амплитуда ЗИКов резко увеличивается. Наблюдается, так называемый, эффект канардного взрыва. Более детально этот эффект представлен на рис. 1(б), где изображены ЗИКи при разных значениях параметра α . Видно, что около значения α^* , ЗИКи резко увеличиваются в размере и качественно изменяют свою форму. Значение α^* – это эпицентр канардного взрыва.

В этой статье мы исследовали зону, где в детерминированной модели Рулькова наблюдаются ЗИКи канардного типа, под воздействием случайных возмущений.



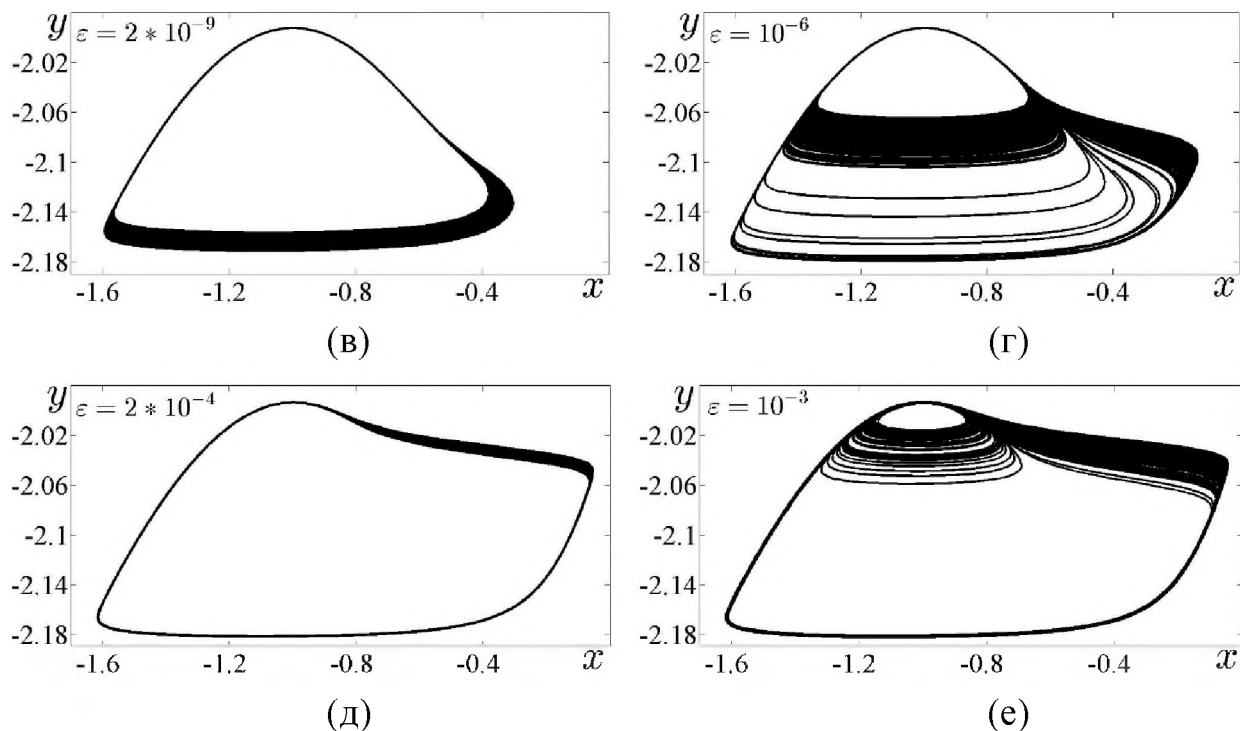


Рисунок 2 - Стохастические ЗИКи (а, б) $\alpha = 1.994$, (в, г) $\alpha = 1.9952775$, (д, е) $\alpha = 1.998$

На рис. 2 представлены стохастические ЗИКи для разных значений параметра α . Рассмотрим изменения в поведении системы на примере $\alpha = 1.994$ (рис. 2(а, б)). Видно, что при небольшом шуме ($\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$) случайные состояния системы локализуются вблизи детерминированной ЗИК (рис. 2(а)). Но при достижении некоторого порогового значения интенсивности шума ($\epsilon = 10^{-3}$) наряду с малоамплитудной стохастической траекторией появляется большеамплитудная траектория, тогда как в детерминированном варианте системы (4) наблюдалась только малоамплитудная траектория (рис. 1(б)). Происходит эффект расщепления. При $\alpha = 1.994$ (рис. 2(а, б)) при увеличении интенсивности шума малоамплитудная траектория расщепляется в большеамплитудную. При $\alpha = 1.998$ (рис. 2(д, е)), наоборот, большеамплитудная траектория расщепляется в малоамплитудную. В эпицентре канарного взрыва при α^* (рис. 2(в, г)) расщепление происходит в обе стороны.

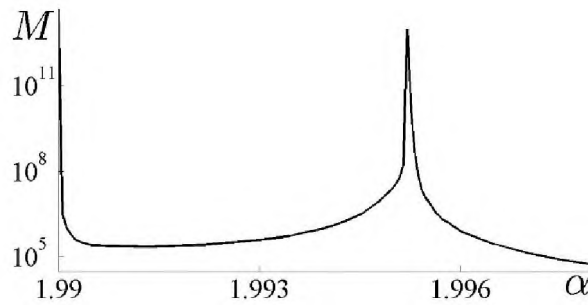


Рисунок 3 - Функция стохастической чувствительности
 $W(\alpha) = \max_{\varphi} \mu(\varphi, \alpha)$

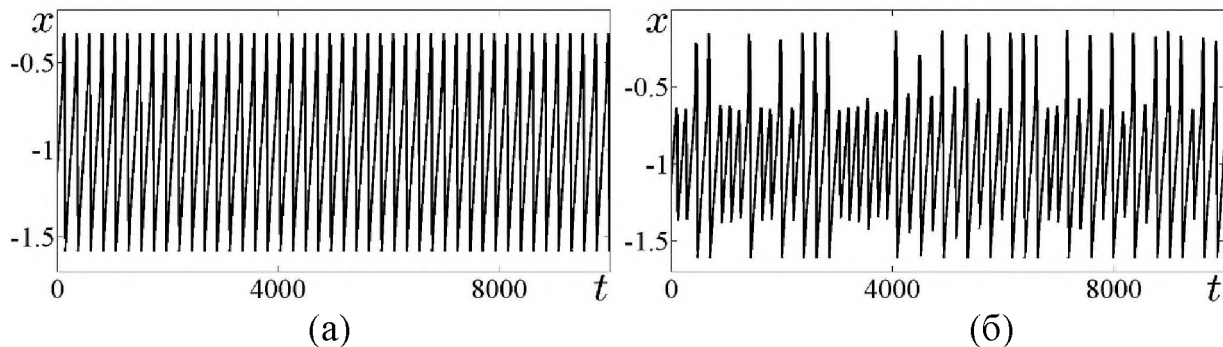


Рисунок 4 - Зависимость x от временного параметра t при $\alpha = 1.9952775$
 для (а) $\varepsilon = 0$ и (б) $\varepsilon = 10^{-6}$

Стоит заметить, что для разных значений бифуркационного параметра α расщепление ЗИКа происходит при разных значениях интенсивности шума. По графикам, представленным на рис. 2, видно, что в эпицентре канардного взрыва ($\alpha = \alpha^*$) процесс расщепления происходит уже при $\varepsilon = 10^{-6}$, тогда как для $\alpha = 1.994$ и $\alpha = 1.998$ даже при большей интенсивности шума ($\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$) данного процесса еще не наблюдается. Это объясняется стохастической чувствительностью ЗИКов при разных значениях бифуркационного параметра α . На рис. 3 представлена зависимость максимума ФСЧ $W(\alpha) = \max_{\varphi} \mu(\varphi, \alpha)$ от бифуркационного параметра α . Когда параметр α приближается к эпицентру канардного взрыва α^* , стохастическая чувствительность ЗИКа увеличивается. Видно, что пик ФСЧ как раз приходится примерно на $\alpha \approx 1.9952775$.

Эффект расщепления также сопровождается сменой режима нейронной активности. В зоне ЗИК детерминированной модели Рулькова наблюдается режим тонического спайкинга (рис. 4(а)). Под воздействием случайных возмущений, когда в системе происходит эффект расщепления, малоамплитудные осцилляции начинают чередоваться с большеамплитудными, что соответствует режиму стохастического берстинга. То есть происходит переход от режима тонического спайкинга к режиму стохастического берстинга.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10098).

Список литературы

1. N.F. Rulkov. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts // Physical Review Letters – 2001. – V. 86. – P. 183 - 186.
2. C. Wang, H. Cao. Parameter space of the Rulkov chaotic neuron model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – 2014. – V. 19, № 6. – P. 2060 - 2070.
3. L. Ryashko, and V. Nasyrova. Analysis of stochastic oscillations in the two-dimensional Rulkov model // AIP Conference Proceedings – 2017. – V. 1886. – Article ID 020086.
4. I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model // Chaos, Solitons and Fractals – 2018. – V. 110. – P. 76 - 81.
5. I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat – 2018. – V. 63. – P. 261 - 270.
6. I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications – 2014. – V. 410. – P. 236 - 243.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С УЧЕТОМ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ТИПОВ

Абрамова Е.П.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

cat.epa.69@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается популяционная модель типа «хищник-жертва» с учетом конкуренции жертв и конкуренции хищников за отличные от жертв ресурсы. Проводится анализ существования и устойчивости аттракторов модели, строятся бифуркационная диаграмма и типичные фазовые портреты. Для стохастической модели исследуется чувствительность аттракторов на основе теории функции стохастической чувствительности. С использованием аппарата доверительных областей (эллипсов для равновесий и